No.

Date

2章 量子力学に現れるトポロジー

2.1 ゲージ変換とAharonov-Bohm位相

静電場中の荷電粒子の運動

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \psi(x) - eA_0(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad \cdots (*)$$

ベクトルポテンシャル　　　　スカラーポテンシャル

粒子を位置 x に見出す確率

$\psi^*\psi$ ⇒ 波動関数の位相そのものは顔を出さない。

⇒ 位相の任意性(ゲージ不変性)が残る。

ゲージ変換

$$\tilde{\psi}(x) = \exp\left[i\frac{-e\Lambda(x)}{\hbar c}\right]\psi(x)$$

において、

$$\tilde{A}_0 = A_0 - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

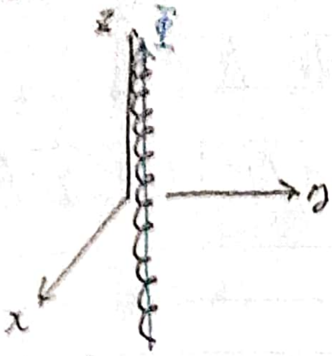
$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\Lambda$$

と変換すると(*)は変わらない!

No.

Date

(Aharonov - Bohm 効果)



コイルが無限に長いとすると

$$B(\mathbf{r}) = \Phi\,\delta(x)\,\delta(y)\,\hat{z}$$

となる。

$$\because\ \Phi = \int dx\,dy\,B_z(\mathbf{r})$$

$$= \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi r A$$

$$\therefore\ \mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r}\,\mathbf{e}_\phi$$

//

古典力学ではソレノイドの外側の粒子は磁場の影響を受けない。

量子力学では？

磁束が0のときの波動関数を $\psi^{(0)}(x)$ とかく。すると

$\mathbf{A}$が有限のときは

$$\psi(x) = \psi^{(0)}(x)\exp\left[i\frac{-e}{\hbar c}\int^{x} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})\right]$$

とかける。

$\because$ $(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}A)\psi$

$$= (-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}A)\psi^{(0)}(x)\exp\left[i\frac{-e}{\hbar c}\int^{x} d\mathbf{r}\cdot A(\mathbf{r})\right]$$

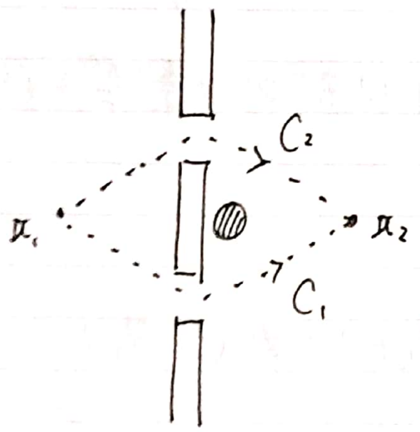
$$= \exp\left[i\frac{-e}{\hbar c}\int^{x} d\mathbf{r}\cdot A\right]\times\left[(-i\hbar\nabla + \cancel{\frac{e}{c}A)}\psi^{(0)} + \psi^{(0)}\cancel{(-i\hbar)i}\frac{-e}{\hbar c}A\right]$$

$$= \exp\left(i\frac{-e}{\hbar c}\int^{x} d\mathbf{r}\cdot A\right)(-i\hbar\nabla\psi^{(0)})$$

同様に

$$(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}A)^2\psi = \exp\left(i\frac{-e}{\hbar c}\int^{x} d\mathbf{r}\cdot A\right)(-\hbar^2\nabla^2\psi^{(0)})$$

よって ψ は $A\neq 0$ のときの sch 方程式の解となる。 //



x_2 で波動関数は 2つの経路を辿る波動関数の重ね合わせでかける。

$$\psi(x) = \psi_1^{(0)}(x)\exp\left[i\frac{-e}{\hbar c}\int_{\mathrm{Path}\,C_1}^{x} d\mathbf{r}\cdot A(\mathbf{r})\right]$$

$$+\psi_2^{(0)}(x)\exp\left[i\frac{-e}{\hbar c}\int_{\mathrm{Path}\,C_2}^{x} d\mathbf{r}\cdot A(\mathbf{r})\right]$$

$\Downarrow$

2つの経路の位相差は観測量

$$\Delta\phi \equiv \frac{-e}{\hbar c}\int_{C_1} d\mathbf{r}\cdot A(\mathbf{r}) - \frac{-e}{\hbar c}\int_{C_2} d\mathbf{r}\cdot A(\mathbf{r})$$

$$= \frac{-e}{\hbar c}\oint_{C} d\mathbf{r}\cdot A(\mathbf{r})$$

$\nwarrow C = C_1 + C_2$

$$= \frac{-e}{\hbar c}\int_S d\mathbf{S}\cdot B(\mathbf{r}) = \frac{-e}{\hbar c}\Phi$$

$\cancel{\Delta\phi \simeq \Delta\tilde{\phi} = \Delta\phi + \frac{2\pi\hbar c}{e} n}$

Φを $\tilde{\Phi} = \Phi + \dfrac{2\pi\hbar c}{e} n$ （n: 整数）

としても観測される位相差は変わらない。（磁束の量子化）

$\Delta\phi$はゲージ不変量である。

$$
\begin{aligned}
\because\ \Delta\tilde{\phi} &= \frac{-e}{\hbar c}\oint_C d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{A}+\nabla\Lambda) \\
&= \frac{-e}{\hbar c}\oint_C d\mathbf{r}\cdot\mathbf{A} + \frac{-e}{\hbar c}\oint_C d\mathbf{r}\cdot\nabla\Lambda \\
&= \frac{-e}{\hbar c}\int_S d\mathbf{S}\cdot\mathbf{B} + \frac{-e}{\hbar c}\int_S d\mathbf{S}\cdot\underbrace{(\nabla\times\nabla\Lambda)}_{=0} \\
&= \Delta\phi \qquad \square
\end{aligned}
$$

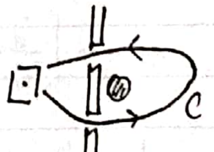
$\Downarrow$

・電子線ホログラフィーを用いた実験

・量子リング

で観測可能

（Aharonov-Bohm効果の異なる見方）



電子を箱に入れて経路Cを1周すると
電子の波動関数は $e^{i\Delta\phi}$ だけずれる。

2.2 Diracの磁気単極子

Maxwell方程式

$$\begin{cases} \nabla\cdot D = 4\pi\rho \\ \nabla\cdot B = 4\pi\rho_M \quad (\rho_M : \text{磁荷密度}) \\ \nabla\times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} - j_m \\ \nabla\times H = j + \dfrac{\partial D}{\partial t} \end{cases}$$

$$\int_V \nabla\cdot B\, dV = \int_S B\cdot dS = 4\pi e_M$$

$$\therefore B\cdot 4\pi r^2 = 4\pi e_M$$

$$\therefore B = \frac{e_M}{r^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

⇑

BがこのようになるAを求めたい!

$$A(\mathbf{r}) = e_M \frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\phi \quad \text{ならどうか?}$$

$$\nabla\times A = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\phi$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(e_M\frac{1-\cos\theta}{r}\right)\mathbf{e}_r - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\mathbf{e}_\theta$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}e_M\frac{\sin\theta}{r}\mathbf{e}_r = \frac{e_M}{r^2}\mathbf{e}_r \quad //$$

↑ たしかにBが求まる!

問題点 $\theta=\pi$ で特異的なふるまい

$\theta\to 0$ のとき $A\to e_M\dfrac{1-1}{0}e_\phi=0$

$\theta\to\pi$ のとき $A\to e_M\dfrac{1-(-1)}{0}e_\phi=\infty$

このように A が特異的になる半直線 $(z<0)$ を Diracストリング という。

そこで

$$A(r)=e_M\frac{-1-\cos\theta}{r\sin\theta}e_\phi$$

とすると、$\theta=\pi$ での特異性は消えるが、$\theta=0$ で特異的になってしまう。

$$A(r)=\begin{cases} A^N(r)=e_M\dfrac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}e_\phi & (0\leq\theta\leq\pi-\epsilon) \\ A^S(r)=e_M\dfrac{-1-\cos\theta}{r\sin\theta}e_\phi & (\epsilon<\theta\leq\pi) \end{cases}$$

で定義する。

$\mathbb{A}^N$と$\mathbb{A}^S$は同じ$\mathbb{B}$を与えるので互いにゲージ変換で結びつく。

$$\mathbb{A}^N-\mathbb{A}^S=\frac{2e_M}{r\sin\theta}\mathbb{e}_\phi$$

$$\nabla\Lambda=\mathbb{e}_r\frac{\partial\Lambda}{\partial r}+\mathbb{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}+\mathbb{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi}$$

$$=\nabla\Lambda$$

$$(\Lambda=2e_M\phi)$$

(磁荷の量子化)

モノポール磁場中の荷電粒子の運動

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla+\frac{e}{c}\mathbb{A}\right)^2\psi(x)=E\psi(x)$$

波動関数はどちらのゲージを用いるかで変わる。

$0\le\theta\le\pi-\epsilon$ では $\mathbb{A}=\mathbb{A}^N$

$\epsilon\le\theta\le\pi$ では $\mathbb{A}=\mathbb{A}^S$

$\epsilon<\theta<\pi-\epsilon$ では どちらでもよいが、ここで波動関数はゲージ変換 $\psi^N=\exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\Lambda\right)\psi^S$ で結びついている。

$\Lambda=2e_M\phi$ より

$$\psi^N=\exp\left(-i\frac{2ee_M}{\hbar c}\phi\right)\psi^S$$

条件 波動関数の一価性よりϕを0から2πまで1周したときに、

波動関数の値が$\phi=0$と$\phi=2\pi$で一致

$\phi = 0$ のとき

$$\psi^N = \psi^S$$

$\phi = 2\pi$ のとき

$$\psi^N = \exp\left(-i \underbrace{\frac{2ee_M}{\hbar c}} 2\pi\right) \psi^S$$

ここが整数でないといけない

$$N = \frac{2ee_M}{\hbar c} \quad (N \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore e_M = \frac{\hbar c}{2e} N \quad (\text{磁荷の量子化})$$

2.3 Berry位相

・非縮退系のBerry位相

系にはあるパラメータ $\mathbb{R} = (R_x, R_y, R_z)$ があるとする。

↑これがゆっくり変化するとする

(例) $\mathcal{H} = \mathbb{S}\cdot\mathbb{R}$ (Zeeman相互作用)

↖磁場

磁場 $\mathbb{R}$ の変化がゆっくりならスピンは

磁場の向きに追従し、準位を変えない。

$$H[\mathbb{R}(t)]\,|n, \mathbb{R}(t)\rangle = E_n[\mathbb{R}(t)]\,|n, \mathbb{R}(t)\rangle$$

時間に依存したsch方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_n ; t\rangle = H[\mathbb{R}(t)]\,|\Psi_n ; t\rangle$$

⇩

時間がたっても固有状態 $|n, \mathbb{R}(t)\rangle$ にい続ける。

$$|\Psi_n ; t\rangle = e^{i\theta(t)}|n, \mathbb{R}(t)\rangle$$

$$(\text{左辺}) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{i\theta(t)}|n, \mathbb{R}(t)\rangle = \hbar e^{i\theta(t)}\left(-\frac{d\theta}{dt}|n, \mathbb{R}(t)\rangle + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|n, \mathbb{R}(t)\rangle\right)$$

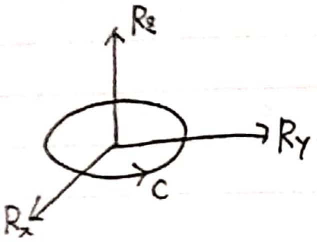
$$(\text{右辺}) = H[\mathbb{R}(t)]\,e^{i\theta(t)}|n, \mathbb{R}(t)\rangle = e^{i\theta(t)}E_n[\mathbb{R}(t)]\,|n, \mathbb{R}(t)\rangle$$

$$\therefore \hbar e^{i\theta(t)}\left(-\frac{d\theta}{dt}|n, \mathbb{R}(t)\rangle + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|n, \mathbb{R}(t)\rangle\right) = e^{i\theta(t)}E_n[\mathbb{R}(t)]\,|n, \mathbb{R}(t)\rangle$$

$\langle n, \mathbb{R}(t)|$ を作用させる。

$$-\hbar \frac{d\theta}{dt} + i\hbar \langle n, \mathbb{R}(t)| \frac{\partial}{\partial t} | n, \mathbb{R}(t) \rangle = E_n[\mathbb{R}(t)]$$

$$\therefore \theta(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^T E_n[\mathbb{R}(t)]\,dt + \underbrace{\int_0^T dt\; i \langle n, \mathbb{R}(t)| \nabla_{\mathbb{R}} | n, \mathbb{R}(t) \rangle \cdot \dot{\mathbb{R}}(t)}_{\text{Berry位相 } \gamma_n[C]}$$



← $\mathbb{R}$ が $t=0$ ($\mathbb{R}(0) = \mathbb{R}_0$) から $t=T$ で $\mathbb{R}(T) = \mathbb{R}_0$ と戻るとする。

$$\gamma_n[C] = \int_0^T dt\, \dot{\mathbb{R}}(t) \cdot i \langle n, \mathbb{R}(t)| \nabla_{\mathbb{R}} | n, \mathbb{R}(t) \rangle$$

$$= \oint_C d\mathbb{R} \cdot i \langle n, \mathbb{R}(t)| \nabla_{\mathbb{R}} | n, \mathbb{R}(t) \rangle$$

$$\mathbb{A}_n(\mathbb{R}) \equiv -i \langle n, \mathbb{R}| \nabla_{\mathbb{R}} | n, \mathbb{R} \rangle \quad \text{(Berry接続)}$$

$$= -\oint_C d\mathbb{R} \cdot \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$$

$$\mathbb{B}_n(\mathbb{R}) = \nabla_{\mathbb{R}} \times \mathbb{A}_n(\mathbb{R}) \quad \text{(Berry曲率)}$$

$$= -\int_S d\mathbb{S} \cdot \mathbb{B}_n(\mathbb{R}) \quad \cdots (*)$$

$$\therefore e^{i\gamma_n[C]} = \exp\left[-i\oint_C d\mathbb{R} \cdot \mathbb{A}_n(\mathbb{R})\right]$$

ゲージ変換 $|n,\mathbb{R}\rangle' = e^{i\Lambda(\mathbb{R})}|n,\mathbb{R}\rangle$ において

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_n'(\mathbb{R}) &= -i\langle n,\mathbb{R}|\nabla_{\mathbb{R}}|n,\mathbb{R}\rangle' \\ &= -i\langle n,\mathbb{R}|e^{-i\Lambda(\mathbb{R})}\nabla_{\mathbb{R}}e^{i\Lambda(\mathbb{R})}|n,\mathbb{R}\rangle \\ &= \mathbb{A}_n(\mathbb{R}) + \nabla_{\mathbb{R}}\Lambda(\mathbb{R})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_n'(\mathbb{R}) &= \nabla_{\mathbb{R}}\times\mathbb{A}_n'(\mathbb{R}) \\ &= \nabla_{\mathbb{R}}\times(\mathbb{A}_n(\mathbb{R}) + \nabla_{\mathbb{R}}\Lambda(\mathbb{R})) \\ &= \nabla_{\mathbb{R}}\times\mathbb{A}_n(\mathbb{R}) + \underbrace{\nabla_{\mathbb{R}}\times\nabla_{\mathbb{R}}\Lambda(\mathbb{R})}_{=0} \\ &= \mathbb{B}_n(\mathbb{R})\end{aligned}$$

(※)の S はループ C で縁どられる任意の曲面である。

⇒ 選び方に任意性がある。

$$\int_{S_1} d\mathbb{S}_1\cdot\mathbb{B}_n(\mathbb{R}) = \int_{S_2} d\mathbb{S}_2\cdot\mathbb{B}_n(\mathbb{R}) + \underbrace{2\pi N}_{}\quad (N\in\mathbb{Z})$$

この項があっても波動関数の位相は変わらない

$$\therefore \int_{S} d\mathbb{S}\cdot\mathbb{B}_n(\mathbb{R}) = 2\pi N$$

S_1とS_2を合わせた閉曲面

以下では $\nabla_R = \nabla$, $\nabla_R|n;R\rangle = |\nabla n, R\rangle$ と書く。

$$\gamma_n[C] = \int dS\cdot \nabla\times i\langle n,R|\nabla n,R\rangle$$
$$= \int dS \cdot i\langle \nabla n, R| \times |\nabla n,R\rangle$$
$$= \sum_{m(\neq n)} \int dS\cdot i\langle\nabla n,R|m,R\rangle\times\langle m,R|\nabla n,R\rangle$$

・$\gamma_n[C]$ は $m=n$ のとき 0 になる

∵ $\langle n|n\rangle = 1$ より $\langle\nabla n|n\rangle + \langle n|\nabla n\rangle = 0$

$\langle\nabla n|n\rangle = -\langle n|\nabla n\rangle$

よって $\langle\nabla n|n\rangle\times\langle n|\nabla n\rangle = -\langle n|\nabla n\rangle\times\langle n|\nabla n\rangle = 0$ □

・$\langle m,R|\nabla|n,R\rangle = \dfrac{\langle m,R|(\nabla H[R])|n,R\rangle}{E_n - E_m}$

∵ $H[R]|n,R\rangle = E_n(R)|n,R\rangle$ より

$(\nabla H[R])|n,R\rangle + H[R]|\nabla n,R\rangle = (\nabla E_n(R))|n,R\rangle + E_n(R)|\nabla n,R\rangle$

$\langle m,R|$ をかける。

$\langle m,R|(\nabla H[R])|n,R\rangle = (E_n(R) - E_m(R))\langle m,R|\nabla n,R\rangle$

$\therefore \langle m,R|\nabla n,R\rangle = \dfrac{\langle m,R|(\nabla H[R])|n,R\rangle}{E_n(R) - E_m(R)}$ □

$$\gamma_n[C] = -\sum_{m(\neq n)} \int d\mathbb{S} \cdot \frac{\langle n,\mathbb{R}|(\nabla H)|m,\mathbb{R}\rangle \times \langle m,\mathbb{R}|(\nabla H)|n,\mathbb{R}\rangle}{i(E_n(\mathbb{R}) - E_m(\mathbb{R}))^2}$$

$$\therefore\ \mathbb{B}_n(\mathbb{R}) = \sum_{m(\neq n)} \frac{\langle n,\mathbb{R}|(\nabla H)|m,\mathbb{R}\rangle \times \langle m,\mathbb{R}|(\nabla H)|n,\mathbb{R}\rangle}{i\,(E_n(\mathbb{R}) - E_m(\mathbb{R}))^2}$$

例 二準位系のBerry位相

$$H[\mathbb{R}] = \mathbb{R}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbb{R} = R(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)$$

固有エネルギー $E_+ = +|\mathbb{R}|$ $E_- = -|\mathbb{R}|$

固有スピノル $|+,\mathbb{R}\rangle = e^{-\frac{i\psi}{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$

$$|-,\mathbb{R}\rangle = \underbrace{e^{-\frac{i\psi}{2}}}_{\text{ゲージ自由度}}\begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

$$A_+(\mathbb{R}) = -i\langle +,\mathbb{R}|\nabla|+,\mathbb{R}\rangle$$

$$\cancel{-i\,e^{\frac{i\psi}{2}}\begin{pmatrix} e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}}$$

$$= -i\,e^{i\psi/2}\left(e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2},\ e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\times\, e^{-\frac{i\psi}{2}}\begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\nabla(\psi+\phi)e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\nabla\theta\, e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ -\frac{i}{2}\nabla(\psi-\phi)e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\nabla\theta\, e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$= -i\left(-\frac{i}{2}\nabla(\psi+\phi)\cos^2\frac{\theta}{2} - \cancel{\frac{1}{2}\nabla\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \right.$$

$$\left. -\frac{i}{2}\nabla(\psi-\phi)\sin^2\frac{\theta}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\nabla\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\nabla\psi - \nabla\phi\cos\theta\right)$$

θ, ϕ は $\mathbb{R}$ の角度だから $\mathbb{R}$ と $|+,\mathbb{R}\rangle = |\theta,\phi\rangle$ が1対1対応するように ψ を決める。

$\psi = -\phi$ のとき $\mathbb{A}_+^N(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)\nabla\phi = \frac{1-\cos\theta}{2R\sin\theta}\mathbb{e}_\phi$

$\psi = \phi$ のとき $\mathbb{A}_+^S(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}(-1-\cos\theta)\nabla\phi = \frac{-1-\cos\theta}{2R\sin\theta}\mathbb{e}_\phi$

$\mathbb{A}^N$ は $\theta = \pi$ で特異的
$\mathbb{A}^S$ は $\theta = 0$ で特異的

$\theta \to \pi-\theta$, $\phi \to \phi+\pi$, $\psi \to \psi-\pi$ とすればもう1つの固有スピノル $|-,\mathbb{R}\rangle$ が求まるので、

$$\mathbb{A}^-(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}\left(-\nabla\psi + \nabla\phi\cos\theta\right)$$

$\psi = \phi$ のとき $\mathbb{A}_-^N(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}(-1+\cos\theta)\nabla\phi = \frac{-1+\cos\theta}{2R\sin\theta}\mathbb{e}_\phi$

$\psi = -\phi$ のとき $\mathbb{A}_-^S(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)\nabla\phi = \frac{1+\cos\theta}{2R\sin\theta}\mathbb{e}_\phi$

このときBerry曲率は

$$\mathbb{B}_\pm(\mathbb{R}) = \nabla \times \mathbb{A}^N_\pm(\mathbb{R}) = \nabla \times \mathbb{A}^S_\pm(\mathbb{R})$$

$$= \pm \frac{1}{2}\frac{\mathbb{R}}{R^3}$$

(∵) $\mathbb{B}_+(\mathbb{R}) = \nabla \times \mathbb{A}^N_+(\mathbb{R})$

$$= \left[\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A^N_{+\phi}\sin\theta) - \frac{\partial A^N_{+\theta}}{\partial\phi}\right]\mathbb{e}_r$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A^N_{+r}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial R}(RA^N_{+\phi})\right]\mathbb{e}_\theta$$

$$+ \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA^N_{+\theta}) - \frac{\partial A^N_{+r}}{\partial\theta}\right]\mathbb{e}_\phi$$

$$= \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{2R}\right)\mathbb{e}_r - \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}\right)\mathbb{e}_\theta$$

$$= \frac{1}{R^2}\mathbb{e}_r = \frac{\mathbb{R}}{R^3}$$

他の場合も同様 $\blacksquare$

・縮退系のBerry位相行列

<u>設定</u> あるパラメータ$\mathbb{R}(t)$が初期値$\mathbb{R}_0$からゆっくり変化したとする。

時刻tでn番目の固有エネルギー$E_n[\mathbb{R}(t)]$に属する縮退した2つの状態を$|n,1,\mathbb{R}(t)\rangle$, $|n,2,\mathbb{R}(t)\rangle$とかく。

$$|\Psi_{n,1};t\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' E_n[\mathbb{R}(t')]\right)\left[\Omega_{11}(t)|n,1,\mathbb{R}(t)\rangle + \Omega_{21}(t)|n,2,\mathbb{R}(t)\rangle\right]$$

$$|\Psi_{n,2};t\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' E_n[\mathbb{R}(t')]\right)\left[\Omega_{12}(t)|n,1,\mathbb{R}(t)\rangle + \Omega_{22}(t)|n,2,\mathbb{R}(t)\rangle\right]$$

これらをまとめて

$$|\Psi_{n,\beta};t\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' E_n[\mathbb{R}(t')]\right)\sum_{\alpha=1,2}\Omega_{\alpha\beta}(t)|n,\alpha,\mathbb{R}(t)\rangle$$

波動関数のノルムの保存から$\Omega_{\alpha\beta}(t)$はユニタリーである。

また、初期条件から$\Omega_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta}$

Sch方程式より

$$0 = \left(H - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)|\Psi_{n,\beta};t\rangle$$

$$= \left(H - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' E_n[\mathbb{R}(t')]\right]\sum_\gamma \Omega_{\gamma\beta}(t)|n,\gamma,\mathbb{R}(t)\rangle$$

$$= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' E_n[\mathbb{R}(t)]\right]$$

$$\times\sum_\gamma\left(\underbrace{\cancel{\Omega_{\gamma\beta}(H-E_n)}}_{0} - i\hbar\frac{d\Omega_{\gamma\beta}}{dt} + \Omega_{\gamma\beta}(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial t}\right)|n,\gamma,\mathbb{R}(t)\rangle$$

これに $\langle n,\alpha,\mathbb{R}(t)|$ をかける。

$$0 = -i\hbar\frac{d\Omega_{\alpha\beta}}{dt}\langle n,\alpha,\mathbb{R}(t)|n,\alpha,\mathbb{R}(t)\rangle$$

$$+\sum_\gamma\Omega_{\gamma\beta}(-i\hbar)\langle n,\alpha,\mathbb{R}(t)|\frac{\partial}{\partial t}|n,\gamma,\mathbb{R}(t)\rangle$$

$$\therefore\ \frac{d\Omega_{\alpha\beta}(t)}{dt} = -\sum_\gamma\Omega_{\gamma\beta}(t)\langle n,\alpha,\mathbb{R}(t)|\frac{\partial}{\partial t}|n,\gamma,\mathbb{R}(t)\rangle$$

$$= -\dot{\mathbb{R}}(t)\cdot\sum_\gamma\Omega_{\gamma\beta}(t)\langle n,\alpha,\mathbb{R}(t)|\nabla_{\mathbb{R}}|n,\gamma,\mathbb{R}(t)\rangle$$

$$= -i\sum_\gamma\dot{\mathbb{R}}(t)\cdot\mathbb{A}_{\alpha\gamma}[\mathbb{R}(t)]\,\Omega_{\gamma\beta}(t)$$

(ただし $\mathbb{A}_{\alpha\beta}[\mathbb{R}] \equiv -i\langle n,\alpha,\mathbb{R}|\nabla_{\mathbb{R}}|n,\beta,\mathbb{R}\rangle$)

$$\boxed{\frac{d\Omega_{\alpha\beta}(t)}{dt} = -i\sum_\gamma\dot{\mathbb{R}}(t)\cdot\mathbb{A}_{\alpha\gamma}[\mathbb{R}(t)]\,\Omega_{\gamma\beta}(t)}\quad\cdots(*)$$

(*)よりΩ行列は

$$\Omega(t+dt) = \Omega(t) - i\dot{\mathbb{R}}(t)\cdot \mathbb{A}[\mathbb{R}(t)]\,\Omega(t)\,dt + \cdots$$

$$\simeq \exp\left(-i\,dt\,\dot{\mathbb{R}}(t)\cdot \mathbb{A}[\mathbb{R}(t)]\right)\Omega(t)$$

⇓

$\Omega(t)$は$\Omega(0)$を用いて表せる。

(経路順序積の導入)

$$\Omega(\Delta t_1) = e^{-i\Delta\mathbb{R}_1\cdot\mathbb{A}(\mathbb{R}_0)}\,\Omega(0)$$

$$\Omega(\Delta t_2) = e^{-i\Delta\mathbb{R}_2\cdot\mathbb{A}(\mathbb{R}_0+\Delta\mathbb{R}_1)}\,\Omega(\Delta t_1)$$

$$= e^{-i\Delta\mathbb{R}_2\cdot\mathbb{A}(\mathbb{R}_0+\Delta\mathbb{R}_1)}\,e^{-i\Delta\mathbb{R}_1\cdot\mathbb{A}(\mathbb{R}_0)}\,\Omega(0)$$

以下これをくり返し，$\Omega(t)$を求める。

$$\cdots e^{-i\Delta\mathbb{R}_3\cdot\mathbb{A}(\mathbb{R}_0+\Delta\mathbb{R}_1+\Delta\mathbb{R}_2)}\,e^{-i\Delta\mathbb{R}_2\cdot\mathbb{A}(\mathbb{R}_0+\Delta\mathbb{R}_1)}\,e^{-i\Delta\mathbb{R}_1\cdot\mathbb{A}(\mathbb{R}_0)}$$

$$\equiv \mathrm{P}\exp\left[-i\int_{\mathbb{R}_0} d\mathbb{R}\cdot\mathbb{A}(\mathbb{R})\right]$$

$$\Omega(t) = \mathrm{P}\exp\left[-i\int_{\mathbb{R}_0} d\mathbb{R}\cdot\mathbb{A}(\mathbb{R})\right]\underbrace{\Omega(0)}_{=1}$$

$$\therefore \Omega(t) = \mathrm{P}\exp\left[-i\int_{\mathbb{R}_0}^{\mathbb{R}(t)} d\mathbb{R}\cdot\mathbb{A}(\mathbb{R})\right]$$

$$\Omega[C] = \mathrm{P}\exp\left[-i\oint_C d\mathbb{R}\cdot\mathbb{A}(\mathbb{R})\right]$$

//

No.

Date

一般化されたゲージ変換

$$|n,\alpha,\mathbb{R}\rangle' = \sum_{\gamma} \underbrace{U_{\gamma\alpha}(\mathbb{R})}_{\text{ユニタリー}} |n,\gamma,\mathbb{R}\rangle$$

← 2つの状態を混ぜ合わせる

において

$$\mathbb{A}'_{\alpha\beta}(\mathbb{R}) = -i\langle n,\alpha,\mathbb{R}|'\nabla_{\mathbb{R}}|n,\beta,\mathbb{R}\rangle'$$

$$= -i\sum_{\gamma\delta}\langle n,\gamma,\mathbb{R}|U^{\dagger}_{\alpha\gamma}(\mathbb{R})\nabla_{\mathbb{R}}U_{\delta\beta}(\mathbb{R})|n,\delta,\mathbb{R}\rangle$$

$$= \sum_{\gamma\delta}U^{\dagger}_{\alpha\gamma}(\mathbb{R})\mathbb{A}_{\gamma\delta}(\mathbb{R})U_{\delta\beta}(\mathbb{R})$$

$$-i\sum_{\gamma\delta}U^{\dagger}_{\alpha\gamma}(\mathbb{R})\left(\nabla_{\mathbb{R}}U_{\delta\beta}(\mathbb{R})\right)\langle n,\gamma,\mathbb{R}|n,\delta,\mathbb{R}\rangle$$

$$\therefore \mathbb{A}'(\mathbb{R}) = U^{\dagger}(\mathbb{R})\mathbb{A}(\mathbb{R})U(\mathbb{R}) - iU^{\dagger}(\mathbb{R})\nabla_{\mathbb{R}}U(\mathbb{R})$$

また、

$$e^{-i\Delta\mathbb{R}\cdot\mathbb{A}'(\mathbb{R})} \cong 1 - i\Delta\mathbb{R}\cdot\mathbb{A}'(\mathbb{R})$$

$$\cong 1 - i\Delta\mathbb{R}\cdot U^{\dagger}(\mathbb{R})\mathbb{A}(\mathbb{R})U(\mathbb{R}) - \Delta\mathbb{R}\cdot U^{\dagger}(\mathbb{R})\nabla_{\mathbb{R}}U(\mathbb{R})$$

$$\cong U^{\dagger}(\mathbb{R})\left(1 - i\Delta\mathbb{R}\cdot\mathbb{A}(\mathbb{R})\right)\left(U(\mathbb{R}) - \Delta\mathbb{R}\cdot\nabla_{\mathbb{R}}U(\mathbb{R})\right)$$

$$\cong U^{\dagger}(\mathbb{R})\, e^{-i\Delta\mathbb{R}\cdot\mathbb{A}(\mathbb{R})}\, U(\mathbb{R}-\Delta\mathbb{R})$$

となるので

Scanned by CamScanner

$\mathbb{R}_0$を出発して$\mathbb{R}_0$に戻るループCに対して

$\Delta\mathbb{R} = ①$

$$\Omega'[C] = U^{\dagger}(\mathbb{R}_0)\,\Omega[C]\,U(\mathbb{R}_0)$$

↑
これのトレースをとる

$$W[C] \equiv \mathrm{tr}\,\Omega[C] = \mathrm{tr}\,P\exp\left[-i\oint_C d\mathbb{R}\cdot \mathbb{A}(\mathbb{R})\right]$$

Wilsonループという。

これはゲージ不変

∵ $\mathrm{tr}\,\Omega'[C] = \mathrm{tr}\left[U^{\dagger}(\mathbb{R}_0)\,\Omega[C]\,U(\mathbb{R}_0)\right]$

$= \mathrm{tr}\left[U^{\dagger}(\mathbb{R}_0)\,U(\mathbb{R}_0)\,\Omega[C]\right]$ 　$\mathrm{tr}[ABC] = \mathrm{tr}[BCA]$

$= \mathrm{tr}\,\Omega[C]$ 　Uはユニタリー

!!