§2. 経路積分表示

ファインマン核の中に $N-1$ 個の位置完全性を入れる。

$$K(x', x_0; t', t_0) = \lim_{N\to\infty} \langle x' | \left(\hat{\mathbb{I}} - \frac{i}{\hbar}\Delta t \hat{H}(t_N)\right) \cdots \left(\hat{\mathbb{I}} - \frac{i}{\hbar}\Delta t \hat{H}(t_1)\right) | x_0 \rangle$$

$$= \lim_{N\to\infty} \langle x' | \left(\hat{\mathbb{I}} - \frac{i}{\hbar}\Delta t \hat{H}(t_N)\right) \int dx_{N-1} |x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}|$$

$$\cdots \int dx_j |x_j\rangle\langle x_j| \left(\hat{\mathbb{I}} - \frac{i}{\hbar}\Delta t \hat{H}(t_j)\right) \int dx_{j-1} |x_{j-1}\rangle\langle x_{j-1}|$$

$$\cdots \int dx_1 |x_1\rangle\langle x_1| \left(\hat{\mathbb{I}} - \frac{i}{\hbar}\Delta t H(t_1)\right) |x_0\rangle$$

$\langle x' | \equiv \langle x_N | \rightarrow$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j\right) \left(\prod_{j=1}^{N} \langle x_j | \left(\hat{\mathbb{I}} - \frac{i}{\hbar}\Delta t \hat{H}(t_j)\right) | x_{j-1}\rangle\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j\right) \left(\prod_{j=1}^{N} K(x_j, x_{j-1}; t_j, t_{j-1})\right)$$

無限小時間ファインマン核

無限小時間ファインマン核に運動量完全性を入れて

$$K(x_j, x_{j-1}; t_j, t_{j-1}) = \int dp_j \langle x_j | \left(\hat{\mathbb{I}} - \frac{i}{\hbar}\Delta t \hat{H}(t_j)\right) | p_j\rangle\langle p_j | x_{j-1}\rangle$$

$$= \int dp_j \langle x_j | p_j \rangle \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta t H(p_j, x_j; t_j)\right) \langle p_j | x_{j-1}\rangle$$

$$\left(\langle x_j | p_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} p_j x_j} \qquad \langle p_j | x_{j-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar} p_j x_{j-1}} \text{ より} \right)$$

$$= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_j \Delta x_j} \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta t H(p_j, x_j; t_j)\right)$$

$$(\Delta x_j = x_j - x_{j-1})$$

Δt が十分小さいとすると

$$1 - \frac{i}{\hbar}\Delta t H(p_j, x_j; t_j) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\Delta t H(p_j, x_j; t_j)\right] + O((\Delta t)^2)$$

$\therefore K(x_j, x_{j-1}; t_j, t_{j-1}) = \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\{p_j \Delta x_j - \Delta t H(p_j, x_j; t_j)\}\right]$

よってファインマン核は

$$K(x', x_0; t', t_0) = \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j\right)\left(\prod_{j=1}^{N} \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar}\right)$$

$$\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\Delta t \sum_{j=1}^{N}\left\{p_j\left(\frac{\Delta x_j}{\Delta t}\right) - H(p_j, x_j, t_j)\right\}\right]$$

$H(p_j, x_j; t_j) = \frac{p_j^2}{2m} + V(x_j, t_j)$ とおくと

$$K(x', x_0; t', t_0) = \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j\right)\left(\prod_{j=1}^{N} \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar}\right)$$

$$\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\Delta t \sum_{j=1}^{N}\left\{p_j\left(\frac{\Delta x_j}{\Delta t}\right) - \frac{p_j^2}{2m} - V(x_j, t_j)\right\}\right]$$

p_j 積分を

$$\Delta K_j \equiv \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{i\Delta t}{2m\hbar} p_j^2 + \frac{i}{\hbar} p_j \Delta x_j\right]$$

とおくと

フレネル積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-i|\alpha| x^2 \mp i|\beta| x\right] = \sqrt{\frac{\pi}{i|\alpha|}} \exp\left[i\frac{|\beta|^2}{4|\alpha|}\right]$$

について $|\alpha| \to \frac{\Delta t}{2m\hbar}$, $\mp|\beta| \to \frac{\Delta x_j}{\hbar}$, $dx \to dp_j$

とおけば

$$\Delta K_j = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\exp\left[\frac{im}{2\hbar\Delta t}(\Delta x_j)^2\right]$$

$$\therefore \prod_{j=1}^{N}\Delta K_j = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{\frac{N}{2}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\Delta t\sum_{j=1}^{N}\frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x_j}{\Delta t}\right)^2\right]$$

これを元のファインマン核に代入して

$$K(x', x_0; t', t_0) = \lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\left(\prod_{j=1}^{N-1}\int\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\,dx_j\right)$$
$$\times\exp\left[\frac{i}{\hbar}\Delta t\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x_j}{\Delta t}\right)^2 - V(x_j, t_j)\right\}\right]$$

これをファインマン核の経路積分表示という。

この式から経路積分の意味を考える。

$$S(x_0, \cdots, x_N) \equiv S(x) = \Delta t\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x_j}{\Delta t}\right)^2 - V(x_j, t_j)\right]$$

$N\to\infty$ $(\Delta t\to 0)$ とすると、$S(x)$ は古典作用

$S[x] = \int_{t_0}^{t'} dt\, \mathcal{L}(\dot{x}, x : t)$ とみなせる。

よって上の経路積分表示は指数の肩に古典作用 $S[x]$ が乗った $e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}$ を古典解周りの全ての値にわたり積分することを意味している。

もうひとつの経路積分表示

$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ で定義されるコヒーレント状態

$|\alpha\rangle$ は

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

と書くことができ、単位の分解

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{\mathbb{I}}$$ を満たす。

(証明)

$\alpha = x + iy = re^{i\theta}$ として

$$\int d^2\alpha \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} dx\,dy = \int_0^{\infty} r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

で定義する。

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\alpha^m \alpha^{*n}}{\sqrt{m!\,n!}} |m\rangle\langle n|$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m!\,n!}} |m\rangle\langle n| \int_0^{\infty} dr\, e^{-r^2} r^{n+m+1} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} e^{i(m-n)\theta}$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m!\,n!}} |m\rangle\langle n| \int_0^{\infty} dr\, e^{-r^2} r^{n+m+1} \cdot 2\delta_{m,n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |n\rangle\langle n| \int_0^{\infty} dr\, 2e^{-r^2} r^{2n+1}$$

$(s = r^2)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |n\rangle\langle n| \underbrace{\int_0^{\infty} ds\, s^n e^{-s}}_{\text{ガンマ関数}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |n\rangle\langle n| \cdot n! = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{\mathbb{I}} \quad \square$$

Scanned by CamScanner

$$\langle \alpha'|\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha'^*(\alpha'-\alpha)+\frac{1}{2}(\alpha'^*-\alpha^*)\alpha\right]$$

とも表せる。

異なる

コヒーレント状態の内積が0でないことを示す。

$$\langle \alpha'|\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{|\alpha'|^2}{2}-\frac{|\alpha|^2}{2}\right]\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!m!}}\alpha'^{*m}\alpha^{n}\langle m|n\rangle$$

$$= \exp\left[-\frac{|\alpha'|^2}{2}-\frac{|\alpha|^2}{2}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\alpha'^*\alpha)^{n}$$

$$= \exp\left[-\frac{|\alpha'|^2}{2}-\frac{|\alpha|^2}{2}+\alpha'^*\alpha\right] \neq 0$$

よりコヒーレント状態は直交しない過剰完全系である。

コヒーレント表示の波動関数を

$\psi(T,\alpha) = \langle \alpha|\psi(T)\rangle$ とすると、

$$\psi(T,\alpha) = \langle \alpha|\hat{U}(T,0)|\psi(0)\rangle$$

$$= \int\frac{d^2\alpha_0}{\pi}\langle \alpha|\hat{U}(T,0)|\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|\psi(0)\rangle$$

$$= \int\frac{d^2\alpha_0}{\pi}K(\alpha,\alpha_0;T)\,\psi(0,\alpha_0)$$

$$\left(\begin{aligned}K(\alpha,\alpha_0;T) &= \langle \alpha|\hat{U}(T,0)|\alpha_0\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty}\langle\alpha|\left(\hat{I}-\frac{i}{\hbar}\Delta t\,\hat{H}(t_N)\right)\cdots\left(\hat{I}-\frac{i}{\hbar}\Delta t\,\hat{H}(t_1)\right)|\alpha_0\rangle\end{aligned}\right)$$

単位の分解をN−1個入れて

$$K(a, a_0 ; T) = \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int \frac{d^2 a_j}{\pi}\right) \left(\prod_{j=1}^{N} K(a_j, a_{j-1} ; t_j, t_{j-1})\right)$$

$$\left(K(a_j, a_{j-1} ; t_j, t_{j-1}) = \langle a_j | \left(\hat{I} - \frac{i}{\hbar}\Delta t \hat{H}(\hat{a}^+, \hat{a} ; t_j)\right) | a_{j-1} \rangle \right)$$

ハミルトニアンが正規積順序

$$\hat{H}(t) \to H(\hat{a}^+, \hat{a} ; t) = \sum_{m,n=0} h_{mn}(t) (\hat{a}^+)^m \hat{a}^n$$

で与えられているとすれば

$$\langle a_j | \hat{H}(\hat{a}^+, \hat{a} ; t_j) | a_{j-1} \rangle$$

$$= H(a_j^*, a_{j-1} ; t_j) \langle a_j | a_{j-1} \rangle$$

またΔtが十分小さいとすると、

$$1 - \frac{i}{\hbar}\Delta t H(a_j^*, a_{j-1} ; t_j) = \exp\left[-\frac{i\Delta t}{\hbar} H(a_j^*, a_{j-1} ; t_j)\right]$$

$$\therefore K(a_j, a_{j-1} ; t_j, t_{j-1}) = \exp\left[-\frac{a_j^* \Delta a_j}{2} + \frac{\Delta a_j^* a_{j-1}}{2} - \frac{i\Delta t}{\hbar} H\right]$$

よってファインマン核の経路積分表示は

$$K(a, a_0 ; T) = \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int \frac{d^2 a_j}{\pi}\right) \exp\left[-\sum_{j=1}^{N} \left\{\frac{a_j^* \Delta a_j}{2} - \frac{\Delta a_j^* a_{j-1}}{2} + \frac{i\Delta t}{\hbar} H(a_j^*, a_{j-1} ; t_j)\right\}\right]$$

$\left(\frac{a_j^* \Delta a_j}{2}, \frac{\Delta a_j^* a_{j-1}}{2} \right.$ を運動項という。 $\left.\right)$

自由度f個の場合

交換関係は

$[\hat{a}_p, \hat{a}_r^\dagger] = \delta_{pr}$, $[\hat{a}_p, \hat{a}_r] = [\hat{a}^\dagger_p, \hat{a}_r^\dagger] = 0$
$(p, r = 1, 2, \cdots, f)$

を満たす。

真空は $\hat{a}_p|0\rangle = 0$, $|0\rangle \equiv \overbrace{|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle}^{f個}$

と定義され、消滅演算子およびその固有値は

$\hat{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_f)$, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_f)$

と定義される。

コヒーレント状態と単位の分解は

$|a\rangle = |a_1\rangle \otimes |a_2\rangle \otimes \cdots \otimes |a_f\rangle$

$\int \frac{d^{2f}a}{\pi^f} |a\rangle\langle a| = \hat{I} \ (\equiv \hat{I}_1 \otimes \hat{I}_2 \otimes \cdots \otimes \hat{I}_f)$

と定義される。

すると、ファインマン核は

$$K(a, a_0 ; T) = \lim_{N \to \infty} \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int \frac{d^{2f}a_j}{\pi^f} \right)$$

$$\exp\left[-\sum_{j=1}^{N} \left\{ \frac{a_j^* \Delta a_j}{2} - \frac{\Delta a_j^* a_{j-1}}{2} + i\Delta t \frac{H(a_j^*, a_{j-1}; t_j)}{\hbar} \right\} \right]$$

と書ける。

フェルミ粒子の経路積分表示

フェルミ粒子は生成・消滅演算子が

反交換関係

$$\{\hat{b}, \hat{b}^{+}\} = 1, \quad \{\hat{b}, \hat{b}\} = 0 = \{\hat{b}^{+}, \hat{b}^{+}\}$$

を満たすものとして定義される。

第2式より $\hat{b}^2 = 0 = (\hat{b}^{+})^2$ と分かる。

個数演算子を $\hat{N} \equiv \hat{b}^{+}\hat{b}$ とすると、$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$において

$$\hat{N}|0\rangle = \hat{b}^{+}\hat{b}|0\rangle = 0$$

$$\hat{N}|1\rangle = \hat{b}^{+}\hat{b}|1\rangle = |1\rangle$$

2以上では $|2\rangle \propto (\hat{b}^{+})^2|0\rangle = 0$

よって $\hat{N}$ の固有値は 0 か 1 のみである。

$|n\rangle$ は $\langle m|n\rangle = \delta_{m,n} \quad (m, n = 0, 1)$

$$\sum_{n=0}^{1} |n\rangle\langle n| = \hat{\mathbb{I}}$$

を満たす。

フェルミ系のコヒーレント状態 $|\xi\rangle$ を

$$\hat{b}|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle \quad (\langle\xi|\hat{b}^{+} = \langle\xi|\xi^{*})$$

で定義すると、ξ, ξ^{*} は $\hat{b}, \hat{b}^{+}$ の固有値であるから

$$\xi^2 = 0, \quad (\xi^{*})^2 = 0$$

を満たさなければならない。

つまり反交換関係 $\{\xi_i, \xi_j\} = 0$ $(i,j = 1,2\ ;\ \xi_1 = \xi,\ \xi_2 \equiv \xi^*)$
を満たす。

このような数を<u>グラスマン数</u>といい、

フェルミ演算子とは

$$\{\hat{c}, \xi_i\} = 0 = \{\hat{c}^\dagger, \xi_i\}$$

を満たす。(反交換関係を満たすとき互いに反可換という)

グラスマン数は演算子と同じように共役をとると順序が変わる。

$\hat{c}, \hat{c}^\dagger, \xi, \xi^*$ や奇数個の積 $\hat{c}^\dagger\hat{c}\xi$, $\hat{c}\xi^*\xi$ のように反可換性をもつ量を<u>グラスマン奇</u>という。

偶数個の積 $\hat{c}^\dagger\xi$, $\xi^*\xi$ やボース演算子, c数のように可換性をもつ量を<u>グラスマン偶</u>という。

以上で準備ができたのでコヒーレント状態をつくる。

ユニタリー演算子

$$\hat{U}_F \equiv e^{\hat{F}} \quad (\hat{F} \equiv \hat{b}^\dagger \xi - \xi^* \hat{b})$$

を考える.

$$\hat{U}_F^\dagger \hat{b} \hat{U}_F = \hat{b} + \xi, \quad \hat{U}_F^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{U}_F = \hat{b}^\dagger + \xi^*$$

(証明)

$$\begin{aligned}
[-\hat{F}, \hat{b}] &= [\xi^* \hat{b} - \hat{b}^\dagger \xi, \hat{b}] \\
&= \underbrace{[\xi^* \hat{b}, \hat{b}]}_{0} - [\hat{b}^\dagger \xi, \hat{b}] \\
&= -[\hat{b}^\dagger \xi, \hat{b}] \\
&= -(\hat{b}^\dagger \underbrace{\{\xi, \hat{b}\}}_{0} - \{\hat{b}^\dagger, \hat{b}\} \xi) \\
&= \{\hat{b}^\dagger, \hat{b}\} \xi = \xi
\end{aligned}$$

同様に $[\hat{F}, \xi] = 0$ より

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \cdots$$

より

$$\hat{U}_F^\dagger \hat{b} \hat{U}_F = e^{\hat{F}} \hat{b} e^{\hat{F}} = \hat{b} + [-\hat{F}, \hat{b}] = \hat{b} + \xi$$

第2式も同様に示せる□

これよりコヒーレント状態は

$$|\xi\rangle = \hat{U}_F|0\rangle, \quad \langle\xi| = \langle 0|\hat{U}_F^\dagger$$

と書ける。

∵ $\hat{U}_F^\dagger \hat{b}\, \hat{U}_F = \hat{b} + \xi$ の両辺に左から $\hat{U}_F$ を作用させて

$$\hat{b}\,\hat{U}_F = \hat{U}_F(\hat{b} + \xi)$$

$|\xi\rangle = \hat{U}_F|0\rangle$ とすると、

$$\hat{b}|\xi\rangle = \hat{b}\,\hat{U}_F|0\rangle = \hat{U}_F(\hat{b} + \xi)|0\rangle$$

$$= \hat{U}_F\xi|0\rangle = \xi\hat{U}_F|0\rangle$$

$\hat{b}|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle$ より $|\xi\rangle = \hat{U}_F|0\rangle$

CBH の公式 $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{[\hat{A},\hat{B}]/2}$ において

$\hat{A} \to \hat{b}^\dagger\xi$, $\hat{B} \to -\xi^*\hat{b}$ とすれば

$[\hat{b}^\dagger\xi, -\xi^*\hat{b}] = \xi^*\xi$ より

$$e^{\hat{b}^\dagger\xi - \xi^*\hat{b}} = e^{-\frac{\xi^*\xi}{2}}e^{\hat{b}^\dagger\xi}e^{-\xi^*\hat{b}}$$

$$\therefore |\xi\rangle = e^{\hat{b}^\dagger\xi - \xi^*\hat{b}}|0\rangle$$

$$= e^{-\frac{\xi^*\xi}{2}}e^{\hat{b}^\dagger\xi}\underbrace{e^{-\xi^*\hat{b}}|0\rangle}_{=|0\rangle}$$

$$= e^{-\frac{\xi^*\xi}{2}}e^{\hat{b}^\dagger\xi}|0\rangle$$

$\left\{ e^{-\xi^*\hat{b}} = 1 - \xi^*\hat{b} + \cdots \right.$ より

よってコヒーレント状態の具体系が求まった。

内積もボース系と同様に

実際に計算せよ。

$$\langle\xi'|\xi\rangle = \exp\left[-\frac{\xi'^*\xi'}{2} - \frac{\xi^*\xi}{2} + \xi'^*\xi\right] = \exp\left[-\frac{\xi'^*(\xi'-\xi)}{2} + \frac{(\xi'^*-\xi^*)\xi}{2}\right]$$ 。

Scanned by CamScanner

グラスマン積分

単位の分解に相当する関係を作るために
グラスマン数の積分を

$$\int d\xi = 0, \quad \int \xi d\xi = i, \quad i = \sqrt{-1}$$

で導入する。

積分測度 $d\xi$ はグラスマン奇とする。$\{\xi, d\xi\} = 0$

よって共役は $\int d\xi^* = 0$, $\int \xi^* d\xi^* = i$ となる。

重積分は $\int \xi^* \xi \, d\xi d\xi^* = \int \xi^* d\xi^* \int \xi d\xi = i^2 = -1$

$$\int \xi d\xi d\xi^* = \int \xi^* d\xi d\xi^* = \int d\xi d\xi^* = 0$$

よって単位の分解は次のように与えられる。

$$\int d\xi d\xi^* |\xi\rangle\langle\xi| = \int |\xi\rangle\langle\xi| d\xi d\xi^* = \hat{I} \quad \cdots (*)$$

(証明)

$$|\xi\rangle = e^{-\frac{\xi^*\xi}{2}} e^{\hat{b}^\dagger \xi} |0\rangle = e^{-\frac{\xi^*\xi}{2}} (\hat{I} + \hat{b}^\dagger \xi)|0\rangle$$

$$= e^{-\frac{\xi^*\xi}{2}} (\hat{I} - \xi \hat{b}^\dagger)|0\rangle = e^{-\frac{\xi^*\xi}{2}} (|0\rangle - \xi|1\rangle)$$ より

$$(*) \text{左辺} = \int e^{-\xi^*\xi} (|0\rangle - \xi|1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|\xi^*) d\xi d\xi^*$$

$$= \int e^{-\xi^*\xi} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\xi\xi^* - |0\rangle\langle 1|\xi^* - |1\rangle\langle 0|\xi) d\xi d\xi^*$$

$(e^{-\xi^*\xi} = 1 - \xi^*\xi$ を代入して$)$ $\xi^*\xi$ の二次以外は0

$$= -\int (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \xi^*\xi \, d\xi d\xi^*$$

$$= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \hat{I} \quad //$$

自由度 f の場合

反交換関係は

$$\{\hat{b}_\alpha, \hat{b}_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha,\beta}, \quad \{\hat{b}_\alpha, \hat{b}_\beta\} = \{\hat{b}_\alpha^\dagger, \hat{b}_\beta^\dagger\} = 0$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, f)$$

消滅演算子およびその固有値は

$$\hat{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_f), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_f)$$

と定義される。

コヒーレント状態，内積，単位の分解は

$$|\xi\rangle = |\xi_1\rangle \otimes |\xi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\xi_f\rangle$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\xi^*\xi\right] \exp[\hat{b}^\dagger \xi] |0\rangle$$

$$\langle \xi' | \xi \rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\xi'^*\xi' - \frac{1}{2}\xi^*\xi + \xi'^*\xi\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\xi'^*(\xi' - \xi) + \frac{1}{2}(\xi'^* - \xi^*)\xi\right]$$

$$\int d^f\xi\, d^f\xi^*\, |\xi\rangle\langle\xi| = \hat{I} \; (\equiv \hat{I}_1 \otimes \cdots \otimes \hat{I}_f)$$

と定義される。

m体状態 $(m=1,2,\cdots,f)$ を考える。

番号が小さい方から真空に作用し、

$$\hat{b}^{\dagger}_{\beta_1}\hat{b}^{\dagger}_{\beta_2}\cdots\hat{b}^{\dagger}_{\beta_m}|0\rangle \quad (f\geq\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_m\geq 1)$$

この組合せを縮退度といい、

この場合は $r_m = {}_fC_m$ 通り。

したがって異なる $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ の組を表すラベル

r を導入し、

$$|m;r\rangle = \hat{b}^{\dagger}_{\beta_1}\hat{b}^{\dagger}_{\beta_2}\cdots\hat{b}^{\dagger}_{\beta_m}|0\rangle$$

と書くことができ、正規直交条件

$$\langle m;r|m';r'\rangle = \delta_{mm'}\delta_{rr'}$$

完全性 $\sum_{m,r}|m;r\rangle\langle m;r| = \hat{1}$ を満たす。

コヒーレント表示の波動関数は

$\psi(t,\xi)=\langle\xi|\psi(t)\rangle$ である。

$$\psi(T,\xi)=\int d^{\sharp}\xi_0\, d^{\sharp}\xi_0^*\langle\xi|\hat{U}(T,0)|\xi_0\rangle\langle\xi_0|\psi(0)\rangle$$

$$=\int d^{\sharp}\xi_0\, d^{\sharp}\xi_0^* K(\xi,\xi_0;T)\psi(0,\xi_0)$$

ただし $K(\xi,\xi_0;T)=\langle\xi|\hat{U}(T,0)|\xi_0\rangle$

$$=\lim_{N\to\infty}\langle\xi|\left(\hat{\mathbb{I}}-\frac{i}{\hbar}\Delta t\hat{H}(t_N)\right)\cdots\left(\hat{\mathbb{I}}-\frac{i}{\hbar}\Delta t\hat{H}(t_1)\right)|\xi_0\rangle$$

単位の分解を $N-1$ 個入れると、

$$K(\xi,\xi_0;T)=\lim_{N\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{N-1}\int d^{\sharp}\xi_j\, d^{\sharp}\xi_j^*\right)\left(\prod_{j=1}^{N}K(\xi_j,\xi_{j-1};t_j,t_{j-1})\right)$$

ただし $K(\xi_j,\xi_{j-1};t_j,t_{j-1})$

$$=\langle\xi_j|\left(\hat{\mathbb{I}}-\frac{i}{\hbar}\Delta t H(\hat{b}^\dagger,\hat{b}:t_j)\right)|\xi_{j-1}\rangle$$

$$=\left(1-\frac{i}{\hbar}\Delta t H(\xi_j^*,\xi_{j-1};t_j)\right)\langle\xi_j|\xi_{j-1}\rangle$$

(Δt が十分小さいとすると、)

$$=\exp\left[-\frac{\xi_j^*\Delta\xi_j}{2}+\frac{\Delta\xi_j^*\xi_{j-1}}{2}-\frac{i\Delta t}{\hbar}H(\xi_j^*,\xi_{j-1};t_j)\right]$$

$\therefore K(\xi,\xi_0;T)$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{N-1}\int d^{\sharp}\xi_j\, d^{\sharp}\xi_j^*\right)\exp\left[-\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{\xi_j^*\Delta\xi_j}{2}-\frac{\Delta\xi_j^*\xi_{j-1}}{2}+\frac{i\Delta t}{\hbar}H(\xi_j^*,\xi_{j-1};t_j)\right\}\right]$$